

Gruppenübung 7

Aufgabe 1 Wie aus der Vorlesung bekannt, ist für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{p \times q}$ mit Rang r die Singulärwertzerlegung

$$A = U \Sigma V^*$$

möglich.

Hierbei sind $U \in \mathbb{C}^{p \times p}$ und $V \in \mathbb{C}^{q \times q}$ unitär (d.h. $V^*V = VV^* = I$ und $U^*U = UU^* = I$).

Weiterhin gilt

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

mit den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

a) Zeigen Sie, dass

$$A^*A = V \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}}_{q \times q} V^* \text{ und } AA^* = U \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}}_{p \times p} U^*.$$

Erklären Sie den Zusammenhang der Eigenwerte von A^*A beziehungsweise AA^* mit den Singulärwerten von A .

Lösung:

Es gilt

$$A^*A = (U \Sigma V^*)^* (U \Sigma V^*) = V \Sigma^* \underbrace{U^*U}_I \Sigma V^* = V \Sigma^* \Sigma V^* = V \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}}_{q \times q} V^*,$$

äquivalent für AA^* .

Da $V^* = V^{-1}$ und $U^* = U^{-1}$ gilt, wird A^*A durch eine Ähnlichkeitstransformation mit der Matrix V diagonalisiert. Äquivalentes gilt für AA^* .

Damit sind $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0$ die Eigenwerte von A^*A beziehungsweise AA^* und die Spalten von V beziehungsweise U die zugehörigen Eigenvektoren.

b) Berechnen Sie U , V , und Σ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mithilfe des Aufgabenteils a).

Hinweis: Vom numerischen Standpunkt aus gesehen ist dies eine sehr ineffiziente Methode um die Singulärwertzerlegung zu berechnen. In der Praxis werden Methoden auf Basis der Householder-Transformation und der QR-Transformation verwendet (siehe zum Beispiel Deufhard, *Numerische Mathematik 1*, Kapitel 5.4).

Lösung:

Wie in Aufgabenteil a) gezeigt, können die Matrizen A^*A und AA^* durch eine Ähnlichkeitstransformation mit der Matrix V beziehungsweise U diagonalisiert werden. Daher sind σ_i^2 Eigenwerte der Matrizen A^*A und AA^* . Außerdem sind die Spalten von V und U die Eigenvektoren der Matrizen A^*A beziehungsweise AA^* .

Es gilt

$$AA^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix stehen auf der Diagonalen, das heißt wir erhalten $\sigma_1 = 3$ und $\sigma_2 = \sqrt{5}$ mit

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es ist darauf zu achten, dass die Reihenfolge der Eigenwerte und Eigenvektoren richtig ist, das heißt $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Außerdem müssen die Eigenvektoren normiert werden, damit $U^*U = UU^* = I$ gilt.

Weiterhin ergibt sich

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 5$ und $\lambda_3 = 0$. Mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a) kann man dies auch sofort schließen, da wir die Singulärwerte von A bereits bestimmt haben.

Es ergibt sich

$$V = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei wieder auf die richtige Reihenfolge der Eigenwerte und Eigenvektoren, und auf die Normierung letzterer zu achten ist. Insgesamt erhalten wir also

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} = U\Sigma V^*.$$

Aufgabe 2 Gegeben sei ein System mit zwei Eingängen und einem Ausgang wie in Abbildung 1 dargestellt.

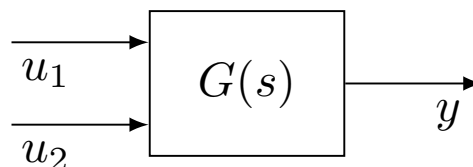


Abbildung 1: MISO-System

Die Übertragungsfunktion ist gegeben durch

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} & \frac{4}{2s+1} \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung

$$G(0) = U \Sigma V^*$$

mit $V := \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$.

Lösung:

Es gilt

$$G(0)G(0)^* = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 25$$

und damit $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5$, $\text{rang}(G(0)) = 1$ und $U = U^* = 1$.

Weiterhin gilt

$$G(0)^*G(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

und damit

$$V = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$V^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$G(0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = U \Sigma V^*.$$

b) Nehmen Sie nun an, dass ein Eingangssignal $u(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T$ gegeben ist mit

$$u(t) = \begin{cases} 0 & : t < 2 \text{ s} \\ v_2 & : 2 \text{ s} \leq t < 15 \text{ s} \\ v_1 + v_2 & : 15 \text{ s} \leq t \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Verlauf von $y(t)$.

Lösung:

Mit den Informationen aus Aufgabenteil b) können wir nur Aussagen über das stationäre Verhalten machen. Aus der Singulärwertzerlegung sehen wir, dass

$$\begin{aligned} G(0) \begin{bmatrix} v_2 & v_1 + v_2 \end{bmatrix} &= U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 & v_1 + v_2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= U \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gilt, was uns das stationäre Verhalten in den unterschiedlichen Zeitabschnitten liefert. In Abbildung 2 ist ein Plot des Systemverhaltens zu sehen.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die H_∞ -Norm der Übertragungsfunktion G definiert durch

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

Lösung:

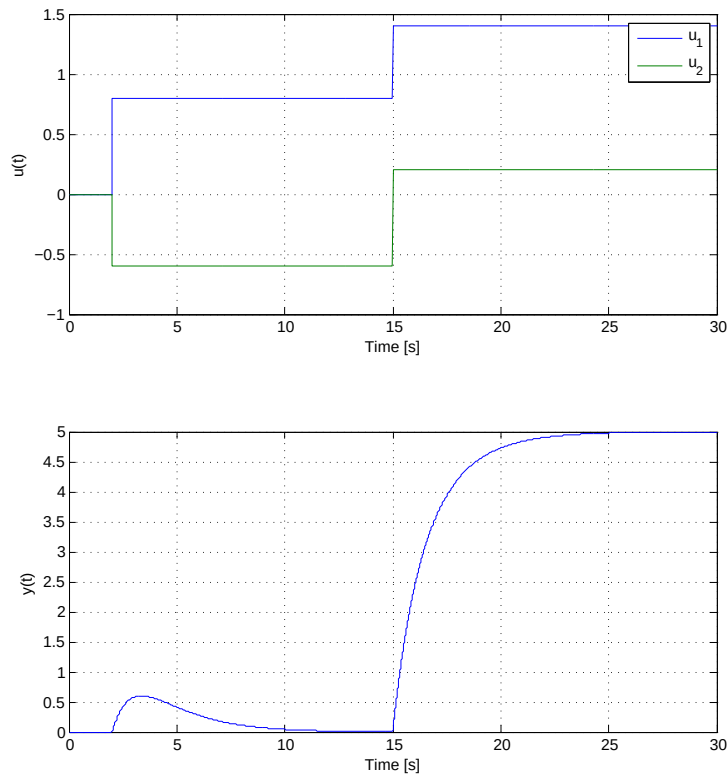


Abbildung 2: Plot der Eingänge und der Systemantwort.

$$\begin{aligned}
 \|G\|_{\infty} &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)| = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{-\omega^2 + j\omega + 1} \right| \\
 &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{-\omega^2 - j\omega + 1}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \right| = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\frac{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}{((1 - \omega^2)^2 + \omega^2)^2}} \\
 &= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 + \omega^4}}
 \end{aligned}$$

Das Supremum von $\frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 + \omega^4}}$ wird für das ω angenommen, das $1 - \omega^2 + \omega^4$ minimiert. Das Minimum von $1 - \omega^2 + \omega^4$ wird bei $\omega^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$ angenommen. die H_{∞} -Norm von G ist $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 4 Gegeben sei ein kausales System G_0 und eine Menge von Systemen Π mit

$$\Pi := \{G \text{ kausale Übertragungsfunktion} \mid G = k_p G_0, k_p \in [k_{\min}, k_{\max}] \subset \mathbb{R}\}.$$

Finden Sie eine kausale Übertragungsfunktion G_1 und ein $r \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\Pi = \{G \text{ kausale Übertragungsfunktion} \mid G = G_1(1 + r\Delta), \Delta \in \mathbb{R}, |\Delta| \leq 1\}.$$

Welcher Art von Unsicherheitsbeschreibung entspricht diese Umformung?

Lösung:

Wir wollen ein beliebiges System $G \in \Pi$ schreiben als

$$G = G_1(1 + r\Delta), \quad (1)$$

wobei $\Delta \in [-1, 1]$ und $r \in \mathbb{R}$. Dass heißt G_1 kann sich von G_0 nur durch eine multiplikative Konstante a unterscheiden, also $G_1 = aG_0$. Des Weiteren ist $1 + r\Delta$ eine monotone Funktion in Abhängigkeit von Δ und da Π alle Systeme $k_p G_0$ mit $k_p \in [k_{\min}, k_{\max}]$ enthält, setzen wir

$$\begin{aligned} G_1(1+r) &= aG_0(1+r) \stackrel{!}{=} k_{\max}G_0 \Rightarrow a(1+r) \stackrel{!}{=} k_{\max} \\ G_1(1-r) &= aG_0(1-r) \stackrel{!}{=} k_{\min}G_0 \Rightarrow a(1-r) \stackrel{!}{=} k_{\min}. \end{aligned}$$

Die Summe der beiden Gleichungen ergibt

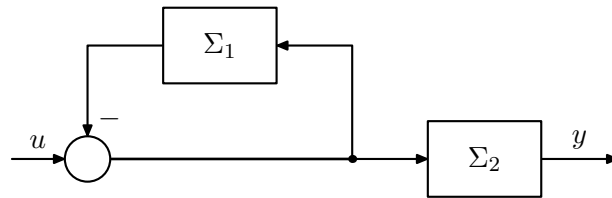
$$a = \frac{k_{\min} + k_{\max}}{2}.$$

Damit gilt $G_1 = \frac{k_{\min} + k_{\max}}{2} G_0$. Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt $2ar = k_{\max} - k_{\min}$ und damit

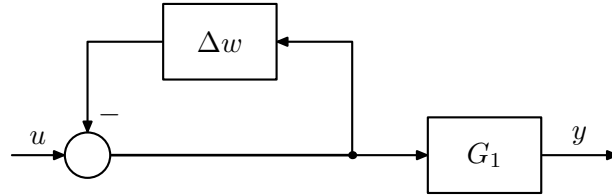
$$r = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{k_{\max} + k_{\min}}.$$

Es handelt sich um eine multiplikative Eingangsunsicherheit.

Aufgabe 5 Gegeben seien kausale Systeme Σ_1, Σ_2 . Wir betrachten ein Übertragungssystem wie in Abbildung 3(a) skizziert.



(a) Übertragungssystem zur Aufgabe 5 a)



(b) Übertragungssystem zur Aufgabe 5 b)

Abbildung 3

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von u nach y des Übertragungssystems aus Abbildung 3(a).

Lösung:

Die Übertragungsfunktion ist gegeben durch

$$\Sigma_2(1 + \Sigma_1)^{-1}.$$

b) Gegeben Sei nun ein kausales System G_0 und eine Menge von Systemen Π mit

$$\Pi := \left\{ G \text{ kausale Übertragungsfunktion} \mid G(s) = \frac{1}{T_s + 1} G_0, T \in [T_{\min}, T_{\max}] \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

Finden Sie kausale Übertragungsfunktionen G_1 und w , so dass wir die Systeme aus Π durch das Übertragungssystem aus Abbildung 3(b) beschreiben können, wobei $|\Delta| \leq 1$ ist.

Lösung:

Die Übertragungsfunktion von 3(b) ist gegeben durch $\frac{G_1}{1 + \Delta w}$. Wir schreiben die Menge der unsicheren Parameter als

$$T \in \left\{ \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} \left(1 + \Delta \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}} \right) \mid |\Delta| \leq 1 \right\}$$

(lineare Interpolation zwischen $T_{\min}$ und $T_{\max}$). Verwende die Abkürzungen $T_1 := \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2}$ und $T_2 := \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}}$. Für alle Systeme in Π gilt dann

$$G = \frac{G_0}{Ts + 1} = \frac{G_0}{1 + T_1 s + T_1 T_2 \Delta s}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{G_0}{1 + T_1 s + T_1 T_2 \Delta s} &\stackrel{!}{=} \frac{G_1}{1 + \Delta w} \\ \Leftrightarrow G_0(1 + \Delta w) &\stackrel{!}{=} G_1(1 + T_1 s + T_1 T_2 \Delta s) \\ \Leftrightarrow G_0 + G_0 \Delta w &\stackrel{!}{=} G_1(1 + T_1 s) + \Delta T_1 T_2 s G_1. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$G_0 = G_1(1 + T_1 s)$$

und

$$G_0 w = T_1 T_2 s G_1.$$

Damit ergibt sich

$$G_1 = \frac{G_0}{1 + T_1 s}$$

und

$$w = \frac{G_1}{G_0} T_1 T_2 s = \frac{T_1 T_2 s}{1 + T_1 s}.$$